SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2002-2003

Sergio Polidoro

UNA DISUGUAGLIANZA DI HARNACK OTTIMALE PER UNA FAMIGLIA DI EQUAZIONI DI KOLMOGOROV-FOKKER-PLANCK

29 aprile 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

Sunto Viene fornita una dimostrazione elementare di una disuguaglianza di Harnack per le soluzioni positive di un'equazione di tipo Kolmogorov and Fokker-Planck con i coefficienti delle derivate seconde costanti. È stata utilizzata una tecnica che si basa su un argomento variazionale e che migliora i risultati noti in letteratura per il fatto che permette di trovare la costante ottimale.

Abstract We consider the second order partial differential equation

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}\partial_{x_i,x_j}u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

where $0 < m_0 \leq N$, $a_{i,j}, b_{i,j}$ are real constant coefficients and $a_{i,j} = a_{j,i}$ for $i,j = 1,...,m_0$. We assume that the operator L satisfies the Hörmander's hypoellipticity condition and that is homogeneous with respect to some dilation group on $\mathbb{R}^{N+1}$.

Our main result is a Harnack inequality for the positive solutions to $Lu = 0$. We recall that Harnack type inequalities for this kind of equation have already been proved by other authors by using some mean value formulas. Here we adopt a simple geometric method that relies on the following gradient estimate for the positive solution of $Lu = 0$ on the domain $\mathbb{R}^N \times]0,T[$:

$$-Yu + \frac{Q}{2t}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u + \partial_t u + \frac{Q}{2t}u \geq \frac{\langle ADu, Du\rangle}{u}.$$

By adding $2\langle ADu, W\rangle + u\langle AW, W\rangle$ to both side of the previous inequality (W is any vector field in $\mathbb{R}^N$) we get $-Yu + \frac{Q}{2t}u + 2\langle ADu, W\rangle + u\langle AW, W\rangle \geq 0$. Now we connect two points $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[$, by a curve $\gamma : [t_1,t_2] \to \mathbb{R}^N$ such that $\dot\gamma = \sum_{i=1}^{m_0} \dot\gamma_i\partial_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}\gamma_i\partial_{x_j}$. We choose $W = \frac{A_0^{-1}\dot\gamma^{(0)}}{2}$ and we get

$$\frac{d}{dt}u(\gamma) + \frac{Q}{2t}u(\gamma) + u(\gamma)\frac{1}{4}\langle A_0^{-1}\dot\gamma^{(0)}, \dot\gamma^{(0)}\rangle \geq 0, \qquad \text{in } [t_1,t_2].$$

Dividing by $u(\gamma)$ and integrating in the variable t we finally find

$$u(x_2,t_2) \geq \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{Q}{2}} u(x_1,t_1)\exp\left(-\frac{1}{4}\inf\int_{t_1}^{t_2}\langle A_0^{-1}\dot\gamma^{(0)}(s), \dot\gamma^{(0)}(s)\rangle ds\right),$$

for any $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \mathbb{R}^N \times]0,T[$. Moreover, we show that the minimum of the above functional is attained by the solution of the Euler-Lagrange equation and that

$$\min\int_{t_1}^{t_2}\langle A_0^{-1}\dot\gamma^{(0)}(s), \dot\gamma^{(0)}(s)\rangle ds = \langle \mathcal{C}^{-1}(t_2-t_1)(x_2 - E(t_2-t_1)x_1), (x_2 - E(t_2-t_1)x_1)\rangle$$

where $\mathcal{C}$ and E are matrices suitably related to the operator L. We emphasize that the above inequality is sharp since the exponent appearing in the Harnack constant is the same one of the fundamental solution of L.

1 Introduzione

Presenterò un recente risultato ottenuto in collaborazione con A. Pascucci [15].

Consideriamo la seguente equazione differenziale

$$L = \operatorname{div}(AD) + \langle x, BD\rangle - \partial_t, \qquad z = (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

dove D e div indicano, rispettivamente, il gradiente e la divergenza in $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ siano matrici $N \times N$ a coefficienti costanti e reali:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

A_0 è una matrice $m_0 \times m_0$ simmetrica e strettamente positiva, mentre B_k è una matrice di dimensione $m_{k-1} \times m_k$ e rango m_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ con

$$m_0 \geq m_1 \geq \ldots m_r \geq 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{r} m_k = N.$$

Ricordiamo che l'equazione (1.1) compare nella teoria dei processi stocastici e cinetici (si vedano, ad esempio, le classiche monografie [4], [7] e [5]) ed in finanza (cfr. [2]).

Prima di enunciare il nostro risultato è opportuno ricordare alcuni fatti noti riguardo alla condizione (1.2). Nelle Proposizioni 2.1 e 2.2 di [13] è stato dimostrato che la condizione (1.2) è sufficiente affinché L soddisfi la classica condizione di Hörmander [10]:

$$\operatorname{rank} \operatorname{Lie}\left(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{m_0}}, Y\right)(x,t) = N+1, \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{1.3}$$

dove $\operatorname{Lie}\left(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{m_0}}, Y\right)$ indica l'algebra di Lie generata dagli operatori differenziali del primo ordine $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{m_0}}$ e $Y = \langle x, BD\rangle - \partial_t$, che è la parte del primo ordine dell'operatore L. Di conseguenza, L è un operatore ipoellittico.

Inoltre, (1.2) implica che L è omogeneo rispetto alle dilatazioni di $\mathbb{R}^N$ definite da

$$\delta_\lambda = \operatorname{diag}(\lambda I_{m_0}, \lambda^3 I_{m_1}, \ldots, \lambda^{2r+1} I_{m_r}), \qquad \lambda > 0, \tag{1.4}$$

dove I_{m_k} è la matrice identità $m_k \times m_k$; in altri termini abbiamo

$$L(u(\delta_\lambda x, \lambda^2 t)) = \lambda^2 (Lu)(\delta_\lambda x, \lambda^2 t) \tag{1.5}$$

per ogni funzione u sufficientemente regolare, $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $\lambda > 0$. Ricordiamo che (1.2) è anche una condizione necessaria: infatti, ogni operatore omogeneo ed ipoellittco L della forma (1.1) verifica necessariamente la condizione (1.2) per una opportuna base di $\mathbb{R}^{N+1}$ (si veda [13]).

Tenendo conto dell'espressione (1.4) delle dilatazioni δ_λ, è comodo indicare le componenti di $x \in \mathbb{R}^N$ mediante le notazioni

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}), \tag{1.6}$$

dove $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{m_k}$ per $k = 0, \dots, r$. Inoltre il numero naturale

$$Q = m_0 + 3m_1 + \cdots + (2r+1)m_r,$$

sarà chiamato *dimensione omogenea di* $\mathbb{R}^N$ rispetto a δ_λ.

Una disuguaglianza di Harnack per (1.1) è stata provata da Kupcov [12], successivamente da [8] e da Lanconelli e me [13], per mezzo di formule di media:

$$u(x_2, t_2) \geq c\, u(x_1, t_1) \tag{1.7}$$

per $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \mathbb{R}^{N+1}$ con $t_1 < t_2$ e per una costante positiva $c = c(x_1, t_1, x_2, t_2)$. In questo seminario mostrerò una prova elementare della disuguaglianza di Harnack, basata su un metodo variazionale introdotto da Li e Yau in [14]. La disuguaglianza migliora quelle note per il fatto che troveremo la costante $c(x_1, t_1, x_2, t_2)$ ottimale (si veda il Corollario 1.2). La prova si basa sulla stima seguente, che verrà provata nella Proposizione 4.1: se $u : \mathbb{R}^N \times]0, T[\to \mathbb{R}$, è una funzione positiva, soluzione dell'equazione $Lu = 0$, allora

$$-Yu + \frac{Q}{2t} u \geq \frac{\langle ADu, Du \rangle}{u}. \tag{1.8}$$

La disuguaglianza di Harnack segue direttamente da (1.8). Infatti, indichiamo con $W = W(x,t)$ un qualunque campo vettoriale su $\mathbb{R}^N$; se aggiungiamo $2\langle ADu, W \rangle + u\langle AW, W \rangle$ ad entrambi i membri di (1.8), otteniamo

$$-Yu + \frac{Q}{2t} u + 2\langle ADu, W \rangle + u\langle AW, W \rangle \geq 0. \tag{1.9}$$

Scegliamo ora W in maniera opportuna. Fissati $z_j = (x_j, t_j) \in \mathbb{R}^N \times]0, T[$, $j = 1, 2$, con $t_1 < t_2$, chiameremo *cammino L-ammissibile* una qualunque curva integrale dei campi $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{m_0}}, -Y$ che connetta z_1 a z_2. Più precisamente, definiamo

$$\mathcal{A}_{z_1, z_2} = \left\{ \gamma \in C^\infty([t_1, t_2]; \mathbb{R}^{N+1}) \;\mid\; \dot\gamma = \sum_{i=1}^{m_0} \dot\gamma_i \partial_{x_i} - Y(\gamma),\ \gamma(t_j) = z_j,\ i = 1, 2 \right\} \tag{1.10}$$

la famiglia dei cammini L-ammissibili. Osserviamo esplicitamente che $\mathcal{A}_{z_1, z_2}$ è non vuoto a causa della condizione di Hörmander e del Teorema di Chow [6]. Se ora $\gamma \in \mathcal{A}_{z_1, z_2}$ è fissato, scegliamo il vettore W nella formula (1.9) come segue:

$$W = \frac{1}{2} A_0^{-1} \dot\gamma^{(0)}$$

(qui abbiamo usato la notazione (1.6)) ed otteniamo

$$\frac{d}{dt} u(\gamma) + \frac{Q}{2t} u(\gamma) + u(\gamma) \frac{1}{4} \langle A_0^{-1} \dot\gamma^{(0)}, \dot\gamma^{(0)} \rangle \geq 0, \qquad \text{in } [t_1, t_2].$$

Dividendo per $u(\gamma)$ ed integrando rispetto alla variabile t nell'intervallo $[t_1, t_2]$, otteniamo infine la prima affermazione del seguente

Teorema 1.1 [Disuguaglianza di Harnack] *Sia u una soluzione positiva dell'equazione $Lu = 0$ in $\mathbb{R}^N \times]0, T[$. Let $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ e siano $0 < t_1 < t_2 < T$. Allora*

$$u(x_2, t_2) \geq \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{Q}{2}} u(x_1, t_1) \exp\left(-\frac{1}{4} \inf \Phi(\gamma)\right), \tag{1.11}$$

dove

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \langle A_0^{-1} \dot{\gamma}^{(0)}(s), \dot{\gamma}^{(0)}(s) \rangle ds, \qquad \gamma \in \mathcal{A}_{z_1, z_2}, \tag{1.12}$$

e l'estremo inferiore in (1.11) viene preso rispetto all'insieme di tutti i cammini L-ammissibili che connettono (x_1, t_1) ad (x_2, t_2). Inoltre esiste un'unico cammino polinomiale $\gamma \in \mathcal{A}_{z_1, z_2}$ che realizza il minimo di Φ.

Il metodo sopra descritto è piuttosto generale ed è stato utilizzato in dversi problemi: equazioni paraboliche sulle varietà (Li e Yau [14]), equazione dei mezzi porosi e p-laplaciano (Auchmuty e Bao [1]), somme di quadrati di campi vettoriali (Cao e Yau [3]). Le difficoltà nuove che si incontrano nello studio degli operatori (1.1) sono dovute al fatto che il funzionale Φ è fortemente degenere, dal momento che agisce solamente sulle prime m_0 componenti di γ. Questo aspetto del problema è evidentemente legato al fatto che l'operatore differenziale in (1.1) è anch'esso fortemente degenere. D'altra parte la condizione di Hörmander assicura che Φ gode delle usuali proprietà di compattezza e di coercività sull'insieme dei cammini L-ammissibili.

La seconda affermazione del Teorema verrà provata nel secondo paragrafo. Per semplicità di esposizione, prenderemo in considerazione solamente il caso degenere corrispondente ad un'algebra di Lie di step due, studiato da Garofalo e Lanconelli in [8], ossia

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rimandiamo a [15] per la prova completa.

Sebbene l'esponente che compare in (1.11) sia espresso in maniera implicita, nei casi più interessanti può essere scritto esplicitamente. Ad esempio, in [1] si mostra che

$$u(x_2, t_2) \geq \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{N}{2}} u(x_1, t_1) \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{|x_1 - x_2|^2}{t_2 - t_1}\right),$$

per ogni soluzione positiva dell'equazione del calore. Otteniamo quindi una versione ottimale della disuguaglianza di Harnack parabolica provata per la prima volta da Pini [16] ed Hadamard [9].

Nel paragrafo 3, estenderemo la disuguaglianza sopra scritta al caso dell'algebra di Lie di step due, considerato da Garofalo e Lanconelli in [8], ma il risultato vale anche per il caso di step 3, considerata da Sonin [18]:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(si veda [15]).

Corollario 1.2 *Sia u una soluzione positiva di $Lu = 0$, dove L è come indicato in* (1.1)-(1.2) *con $r = 1, 2$. Allora risulta*

$$u(x_2, t_2) \geq \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\frac{Q}{2}} u(x_1, t_1) \exp\left(-\frac{1}{4}\langle \mathcal{C}^{-1}(t_2 - t_1)(x_2 - E(t_2 - t_1)x_1), (x_2 - E(t_2 - t_1)x_1)\rangle\right) \tag{1.13}$$

dove $\mathcal{C}$ e E sono definite nell'equazione (1.15) *seguente.*

Sottolineo il fatto che la disuguaglianza (1.13) è ottimale, considerando il fatto che la soluzione fondamentale dell'operatore L in (1.1) (per qualunque r) è

$$\Gamma(z_2, z_1) = \frac{c_0}{(t_2 - t_1)^{\frac{Q}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle \mathcal{C}^{-1}(t_2 - t_1)(x_2 - E(t_2 - t_1)x_1), (x_2 - E(t_2 - t_1)x_1)\rangle\right), \tag{1.14}$$

se $t_2 > t_1$, $\Gamma(z_2, z_1) = 0$ se $t_2 \leq t_1$. In (1.14), abbiamo indicato

$$E(t) = \exp(-tB^T) \quad \text{e} \quad \mathcal{C}(t) = \int_0^t E(s)AE^T(s)ds, \tag{1.15}$$

B^T è la matrice trasposta di B e $t \in \mathbb{R}$. Inoltre $c_0 = (4\pi)^{-\frac{N}{2}}(\det \mathcal{C}(1))^{-\frac{1}{2}}$. Si noti che la condizione di Hörmander assicura che $\mathcal{C}(t) > 0$ per ogni $t > 0$ (cfr. Proposizione A.1 in [13], si veda anche [11]).

2 Prova del Teorema 1.1

Lo scopo di questo capitolo è quello di completare la prova del Teorema 1.1 mostrando che il funzionale Φ in (1.12) ha un unico punto di minimo che risulta essere un cammino L-ammissibile polinomiale. A tal fine, caratterizziamo i punti di minimo di Φ come punti critici: poniamo

$$d\Phi(\gamma, \eta) = \int_{t_1}^{t_2} \langle A_0^{-1}\dot{\gamma}^{(0)}(s), \dot{\eta}^{(0)}(s)\rangle ds, \tag{2.1}$$

e diciamo che γ è un punto critico di Φ in $\mathcal{A}_{z_1,z_2}$ se

$$d\Phi(\gamma, \eta) = 0 \quad \text{per ogni} \quad \eta \in \mathcal{A}_{0,0}. \tag{2.2}$$

Affermiamo che: *γ è un minimo di Φ in $\mathcal{A}_{z_1,z_2}$ se, e solo se, γ è un punto critico di Φ.*

La parte "sufficiente" dell'affermazione è standard, mentre la parte "necessaria" è conseguenza del fatto che Φ è quadratico. Infatti, sia γ un punto critico di Φ in $\mathcal{A}_{z_1,z_2}$. Allora, per ogni $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{A}_{z_1,z_2}$, si ha

$$\Phi(\widetilde{\gamma}) = \Phi(\gamma) + 2d\Phi(\gamma, \gamma - \widetilde{\gamma}) + \Phi(\gamma - \widetilde{\gamma}) \geq \Phi(\gamma),$$

in quanto $(\gamma - \widetilde{\gamma}) \in \mathcal{A}_{0,0}$ e $\Phi(\gamma - \widetilde{\gamma}) \geq 0$. Questo prova l'affermazione.

Come affermato nell'introduzione, proveremo il Teorema 1.1 ed il Corollario 1.2 solamente per gli operatori corrispondenti ad un gruppo di Lie di step 2. Per semplicità, nel seguito supporremo che $A_0 = B_1 = I_m$ (quindi $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$). Inoltre, utilizzando l'invarianza rispetto alle traslazioni, possiamo semplificare ulteriormente le notazioni. Ricordiamo infatti che, se definiamo

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) = (\xi + E(\tau)x, t+\tau), \qquad (x,t),(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1},$$

allora si ha che l'operatore L in (1.1) è invariante rispetto alle traslazioni a sinistra ℓ_ζ, $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$ nel senso che risulta

$$L\,(u \circ \ell_\zeta) = (Lu) \circ \ell_\zeta.$$

Pertanto è sufficiente porre $z = z_1^{-1} \cdot z_2$ e dimostrare il Teorema 1.1 solamente per $z_1 = 0$ e $z_2 = z$. Ricordiamo che l'espressione di z è esattamente $z = (x,t) = (x_2 - E(t_2-t_1)x_1, t_2-t_1)$.

Per provare il Teorema, forniremo dapprima una caratterizzazione dei punti critici di Φ in termini differenziali, quindi mostreremo che l'equazione di Eulero-Lagrange ha un'unica soluzione polinomiale, che risulta essere quindi il minimo di Φ. Osserviamo che, in questo modo, mostriamo direttamente che il minimo del funzionale Φ è un cammino regolare.

Osserviamo innanzitutto ogni cammino L-ammissibile γ verifica la condizione $\dot\gamma^{(1)} = -\gamma^{(0)}$, di conseguenza γ è punto critico del funzionale Φ se, e solo se,

$$d\Phi(\gamma,\eta) = \int_0^t \langle \dot\gamma^{(0)}(s), \dot\eta^{(0)}(s)\rangle ds = \int_0^t \langle \ddot\gamma^{(1)}(s), \ddot\eta^{(1)}(s)\rangle ds = \int_0^t \langle \frac{d^4}{ds^4}\gamma^{(1)}(s), \eta^{(1)}(s)\rangle ds = 0,$$

per ogni $\eta \in C_0^\infty(]0,t[,\mathbb{R}^N)$. Questo prova che γ è un polinomio di grado minore o uguale a 3.

Resta ora da mostrare che le precedenti condizioni individuano un unico cammino polinomiale γ che connetta l'origine di $\mathbb{R}^{N+1}$ con $z = (x,t)$. A tal fine consideriamo il secondo gruppo di coordinate di γ:

$$\gamma^{(1)}(s) = \sum_{j=0}^{3} \alpha_j s^j, \qquad s \in [0,t],$$

per opportuni vettori costanti $\alpha_j \in \mathbb{R}^m$. Imponiamo quindi la condizione $\gamma \in \mathcal{A}_{0,z}$: essendo γ un cammino L-ammissibile, avremo

$$\gamma^{(1)}(0) = 0, \qquad \gamma^{(0)}(0) = -\dot\gamma^{(1)}(0) = 0,$$

quindi $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Di conseguenza $\gamma^{(1)}(s) = s^2 q(s)$, con q funzione lineare:

$$q(s) = \beta_0 + \beta_1(s-t), \qquad s \in [0,t].$$

Evidentemente i coefficienti di q sono determinati dalla condizione $\gamma(t) = x$:

$$x^{(1)} = \gamma^{(1)}(t) = t^2\beta_0, \quad x^{(0)} = -\dot\gamma^{(1)}(t) = -2t\beta_0 - t^2\beta_1,$$

che chiaramente ammette un'unica soluzione. Questo conclude la prova del Teorema 1.1 nel caso particolare considerato.

3 Prova del Corollario 1.2

Proveremo ora il Corollario 1.2 calcolando esplicitamente il minimo di Φ. Come nella prova del Teorema, ci limiteremo a considerare il caso in cui $A_0 = B_1 = I_m$ e prenderemo in considerazione il punto $z = z_1^{-1} \cdot z_2$, in modo da ricondurre il problema al caso $z_1 = 0$. Un candidato naturale ad essere il cammino γ minimizzante sembra essere il cammino

$$\eta(s) = \mathcal{C}(s)\mathcal{C}^{-1}(t)x,$$

in quanto è un cammino polinomiale che connette l'origine con il punto x, ed è un punto critico di Φ. Purtroppo tale cammino *non* è L-ammissibile, tuttavia costruiremo il cammino γ minimizzante come perturbazione di η. Definiamo infatti

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s (p(\sigma) + q(\sigma))d\sigma, \int_0^s \int_0^{s_1} (p(\sigma) + q(\sigma))d\sigma ds_1, s \right) \quad s \in [0, t], \tag{3.1}$$

dove abbiamo posto

$$p(s) = \frac{d}{ds} \left(\mathcal{C}(s)\mathcal{C}^{-1}(t)x \right)^{(0)},$$

mentre q è una funzione polinomiale da determinare. Osserviamo preliminarmente che risulta

$$\int_0^t \int_0^{s_1} p(\sigma)d\sigma ds_1 = tx^{(0)} + x^{(1)} \tag{3.2}$$

Al fine di provare la (3.2), useremo la seguente notazione non-standard: se M è una data matrice $n \times m$ ed $1 \leq i \leq j \leq n$, indicheremo con $[M]_{i,j}$ la matrice $(j - i + 1) \times m$ che si ottiene da M cancellandone le righe dalla prima alla $(i - 1)$-esima e dalla $(j + 1)$-esima all'ultima. Dalla definizione (1.15) segue che

$$p(s) = \frac{d}{ds} \int_0^s [E(\sigma)I_m E^T(\sigma)]_{1,m} d\sigma \mathcal{C}^{-1}(t)x = [E^T(s)]_{1,m}\mathcal{C}^{-1}(t)x,$$

e che

$$-s[E^T(s)]_{1,m} = [E(s)I_m E^T(s)]_{m+1,N}.$$

Dalle due precedenti identità segue

$$\int_0^t sp(s)ds = \int_0^t s[E^T(s)]_{1,m} ds \; \mathcal{C}^{-1}(t)x = [\mathcal{C}(t)]_{m+1,N}\mathcal{C}^{-1}(t)x, = x^{(1)},$$

e, di conseguenza, la (3.2).

A questo punto possiamo determinare q imponendo che $\gamma \in \mathcal{A}_{0,z}$. Innanzitutto γ è L-ammissibile per costruzione, inoltre $\gamma(0) = 0$, quindi è sufficiente chiedere che $\gamma(t) = x$. Essendo ovviamente

$$\int_0^t p(s)ds = x^{(0)},$$

la condizione $g^{(0)} = x^{(0)}$ è equivalente alla seguente

$$\int_0^t q(s)ds = 0.$$

La condizione (3.2) combinata con la richiesta che risulti $g^{(1)} = x^{(1)}$ porta invece alla

$$\int_0^t (t-s)q(s)ds = -\left(2x^{(1)} + tx^{(0)}\right).$$

Un conto diretto mostra che deve essere

$$q(s) = \frac{6(2s-t)}{t^3}\left(tx^{(0)} + 2x^{(1)}\right).$$

Ora che conosciamo il cammino minimizzante, possiamo verificare, con un ultimo calcolo diretto, che risulta effettivamente

$$\Phi(\gamma) = \int_0^t |p(\sigma) + q(\sigma)|^2 d\sigma = \int_0^t |p(\sigma)|^2 d\sigma = \langle \mathcal{C}^{-1}(t)x, x\rangle.$$

Questo conclude la prova del Corollario.

4 Stime del gradiente

In questo paragrafo mostriamo che le soluzioni positive dell'equazione $Lu = 0$ soddisfano alla stima del gradiente (1.8). A causa del fatto che l'operatore L è degenere, non sembra possibile ottenere la stima derivando entrambi i membri dell'equazione differenziale $Lu = 0$, come in [14]. Adottiamo un approccio differente, basato sul fatto che disponiamo dell'espressione esplicita della soluzione fondamentale di L. Osserviamo preliminarmente che Γ soddisfa la seguente equazione

$$-Y\Gamma + \frac{Q}{2t}\Gamma = \frac{\langle AD\Gamma, D\Gamma\rangle}{\Gamma} \tag{4.1}$$

in $\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$. Non riportiamo la prova della (4.1), che si basa su un calcolo diretto.

Proposizione 4.1 *Sia u una soluzione positiva di $Lu = 0$ nella striscia $\mathbb{R}^N \times]0, T[$, $T > 0$. Allora u soddisfa la stima del gradiente* (1.8), *ossia:*

$$-Yu + \frac{Q}{2t}u \geq \frac{\langle ADu, Du\rangle}{u}$$

in $\mathbb{R}^N \times]0, T[$.

Dimostrazione. Utilizziamo la formula di rappresentazione per le soluzioni positive di $Lu = 0$ (cfr. [17]):

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t,y,t_0)u(y,t_0)dy, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times]t_0, T[. \tag{4.2}$$

Allora, per la (4.1), si ha

$$\begin{aligned} -Yu + \frac{Q}{2t}u &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(-Y\Gamma(\cdot, y, t_0) + \frac{Q}{2t}\Gamma(\cdot, y, t_0)\right) u(y, t_0)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\langle AD\Gamma(\cdot, y, t_0), D\Gamma(\cdot, y, t_0)\rangle}{\Gamma(\cdot, y, t_0)}\right) u(y, t_0)dy \geq \end{aligned}$$

(per la disuguaglianza di Hölder, essendo u positiva)

$$\geq \langle A \int_{\mathbb{R}^N} D\Gamma(\cdot, y, t_0)u(y, t_0)dy, \int_{\mathbb{R}^N} D\Gamma(\cdot, y, t_0)u(y, t_0)dy\rangle \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(\cdot, y, t_0)u(y, t_0)dy \right)^{-1}$$

e questo conclude la prova. □

Osservazione 4.2 *Il precedente risultato si estende direttamente alle sopra-soluzioni positive, ossia alle funzioni positive che verificano $Lu \leq 0$. Basta infatti osservare che u si rappresenta come*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t, y, t_0)u(y, t_0)dy - \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, t, y, s)Lu(y, s)dyds,$$

e procedere come sopra.

Riferimenti bibliografici

[1] G. Auchmuty and D. Bao, *Harnack-type inequalities for evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994), pp. 117–129.

[2] E. Barucci, S. Polidoro, and V. Vespri, *Some results on partial differential equations and Asian options*, Math. Models Methods Appl. Sci., 11 (2001), pp. 475–497.

[3] H. D. Cao and S.-T. Yau, *Gradient estimates, Harnack inequalities and estimates for heat kernels of the sum of squares of vector fields*, Math. Z., 211 (1992), pp. 485–504.

[4] S. Chandresekhar, *Stochastic problems in physics and astronomy*, Rev. Modern Phys., 15 (1943), pp. 1–89.

[5] S. Chapman and T. G. Cowling, *The mathematical theory of nonuniform gases*, Cambridge University Press, Cambridge, third ed., 1990.

[6] W.-L. Chow, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann., 117 (1939), pp. 98–105.

[7] J. J. Duderstadt and W. R. Martin, *Transport theory*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1979. A Wiley-Interscience Publication.

[8] N. Garofalo and E. Lanconelli, *Level sets of the fundamental solution and Harnack inequality for degenerate equations of Kolmogorov type*, Trans. Amer. Math. Soc., 321 (1990), pp. 775–792.

[9] J. Hadamard, *Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 3 (1954), pp. 337–346 (1955).

[10] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., 119 (1967), pp. 147–171.

[11] L. P. Kupcov, *The fundamental solutions of a certain class of elliptic-parabolic second order equations*, Differencial'nye Uravnenija, 8 (1972), pp. 1649–1660, 1716.

[12] ——, *On parabolic means*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 252 (1980), pp. 296–301.

[13] E. Lanconelli and S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 52 (1994), pp. 29–63. Partial differential equations, II (Turin, 1993).

[14] P. Li and S. T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math., 156 (1986), pp. 153–201.

[15] A. Pascucci and S. Polidoro, *On the Harnack inequality for a class of hypoelliptic evolution equations*, preprint, (2003).

[16] B. Pini, *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 23 (1954), pp. 422–434.

[17] S. Polidoro, *Uniqueness and representation theorems for solutions of Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, Rend. Mat. Appl. (7), 15 (1995), pp. 535–560 (1996).

[18] I. M. Sonin, *A class of degenerate diffusion processes*, Teor. Verojatnost. i Primenen, 12 (1967), pp. 540–547.